Eg - 1

La méthode d'élimination (ou du pivot) de Gauss.

Méthode pour résoudre les systèmes linéaires :

$$(S)\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 & (L_1) \\ \vdots & \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n = b_m & (L_m) \end{cases} \quad (\Leftrightarrow a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = b \qquad a_j, b \in \mathbb{R}^m)$$

$\Sigma(S) = \{ (x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_{j,1}x_1 + \dots + a_{j,n}x_n = b_j \ \forall j = 1 \dots m \}$ espace des solutions.

Opérations sur les systèmes : (qui ne changent pas l'ensemble des solutions)

O1) on peut changer l'ordre des équations.

O2) on peut multiplier une des équations par un scalaire non nul.

O3) on peut ajouter à une équation une combinaison linéaire des autres :

Si $L_1(x) = \dots = L_m(x) = 0$. $\Rightarrow L_j' := L_j + \sum_{i \neq j} \lambda_i L_i$,

$$L_j'(x) = \underset{0}{\underset{\shortparallel}{L_j(x)}} + \sum_{i \neq j} \lambda_i \underset{0}{\underset{\shortparallel}{L_i(x)}} = 0.$$

Si $L_i(x) = 0 \ \forall i \neq j$ et $L_j'(x) = 0$. $\Rightarrow L_j(x) = \underset{0}{\underset{\shortparallel}{L_j'(x)}} - \sum \lambda_i \underset{0}{\underset{\shortparallel}{L_i(x)}} = 0$ etc.

Algorithme de Gauss :

~~B. en utilisant O1, on s'arrange pour avoir que la première éq. $a_{1,1} \neq 0$.~~

Étape 1 : 1.A) On contrôle les valeurs de la première colonne du système :

- si tous coefficients sont nuls, on passe à $\boxed{\text{l'étape 2}}$

- sinon, par O1 on s'arrange pour avoir $a_{1,1} \neq 0$ ⇝ 1.B.

1.B) ligne par ligne, en utilisant O3, on s'arrange pour avoir comme première colonne $\begin{pmatrix} * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ⇝ 1.C

1.C : - Si il y a une ligne $0 \dots 0 = b$ avec $b \neq 0$, le système n'a pas de solutions $\boxed{\text{FIN}}$

- Si il y a une ligne $0 \dots 0 = 0$, on l'enlève

- Dans tout cas : ⇝ Étape 2.

On procède par récurrence sur la dimension des systèmes
$S(n,m)$ = système n inconnues m équations.

1° colonne $a \in \mathbb{R}^m$. Si $a=0 \Rightarrow \left(\begin{array}{c|c} 0 & \\ \vdots & S'(n-1,m) \\ 0 & \end{array}\right)$ on passe à $S'(n-1,m)$

Si $a \neq 0$, à O_1 près, on peut supposer $a_{11} \neq 0$. (dit pivot)
- à $Op_{2,3}$ près on peut supposer $a_{i,1}=0$ $\forall i>1$. ∀

$\rightarrow \left(\begin{array}{c|c} \boxed{a_{11}} & \cdots \\ 0 & \cdots \\ \vdots & \cdots \\ 0 & \cdots \end{array}\right)$ Si il y a une ligne $0=b$,
si $b=0 \Rightarrow$ j'élimine la ligne, et j'ai un système
$S'(n,m-1)$

Si $b \neq 0$, le système n'admet pas de solution. C'est terminé.
S'il n'y a pas $0=b$. je passe au système $S(n-1,m-1)$

FIN

~~Cet algorithme~~

$\forall i \left(\begin{array}{c|c} 0 \neq a_{1,1} & \cdots \\ 0 \neq a_{i,1} & \end{array}\right)$ je substitue L_i par $L_i - \frac{a_{i,1}}{a_{11}} L_1$,
d'une façon que le nouvel système est $a'_{i,1}=0$

$$a_{i,1} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{11} = 0.$$

Cet algorithme réduit le système (S) à un système équivalent (S') en forme échelonnée,

$$S' \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{a_{1,1}} & \cdots & & & \vdots \\ 0 & \boxed{p_{2,i_2}} & \cdots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \boxed{p_{k,i_k}} & \vdots \end{array}\right)$$

$a_{1,1}, a_{2,i_2}, \ldots, a_{k,i_k} \neq 0$ sont dits pivots du système (S')

L3-3

Algorithme de Gauss

Exemple : $k \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} -x_3 + 2x_4 - x_5 = -3 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_5 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = -1 \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_5 = k \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} L_1^{(0)} = L_1 \\ L_2^{(0)} = L_2 \\ L_3^{(0)} = L_3 \\ L_4^{(0)} = L_4 \\ L_5^{(0)} = L_5 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & -2 & k \end{array}\right)$$

je regarde la première colonne a_1 : si $a_1 = 0$, je passe à la colonne d'après

- si $a_1 \neq 0$, par O1 je peux supposer que $a_{11} \neq 0$: (pivot)

$$\begin{array}{c} L_1^{(1)} = L_2 \\ L_2^{(1)} = L_1 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & -2 & 3 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & -2 & +k \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} L'_1 \\ L'_2 \\ L'_3 - L'_1 \\ L'_4 - 2L'_1 \\ L_5 + L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & -2 & 3 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & +1 & -10 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & k+5 \end{array}\right)$$

par O_2, O_3, je ~~...~~ obtient $a_{i,1} = 0 \ \forall i > 1$.

Si il y a une ligne $0 \dots 0 \mid b$, $\begin{cases} b = 0 & \text{j'enlève cette ligne} \\ b \neq 0 & \nexists \text{ solution} \end{cases}$

je passe ~~...~~ à la colonne suivante : ~~...~~ $= 0$.

Donc je passe à la colonne d'après

3e colonne : ~~...~~ $\neq 0$, $a_{23} \neq 0$. pivot

Op. 2,3, j'obtiens $a_{i3} = 0 \ \forall i > 2$.

$$\begin{array}{c} L''_1 \\ L''_2 \\ \frac{L_3}{2} - L_2 \\ L''_4 - L''_2 \\ L''_5 + 4L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & -2 & 3 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & -4 & k-7 \end{array}\right)$$

Il y a une ligne $0 \ldots = 0$, que je peux enlever

puis je continue

$$\begin{array}{c} L_1''' \\ L_2''' \\ L_4''' \\ L_5+2L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & -2 & 3 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-4} & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k-21 \end{array}\right)$$

j'ai un troisième pivot,

et la 4ème ligne est $0 = k-21$

Donc si $k \neq 21$ le système n'a pas de solutions ~~ni~~

Si $k=21$, j'enlève la 4-ème ligne et on obtient :

$$(S')\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 2 & -7 \end{array}\right)$$

Le Système S' est dit : « Réduit en forme ~~...~~ échelonnée »

On dit que il y a 3 pivots, dans les colonnes 1, 3, 4.

Pour donner les solutions les variables associées aux colonnes sans pivot sont des paramètres libres. Dans ce cas $x_2 = b_1$, $x_5 = b_2$.

Après on ~~peut~~ résoudre le système S' (équivalent à S) à partir de la dernière équation :

E_3 : $-4x_4 + 2x_5 = -7 \rightsquigarrow x_4 = \dfrac{7+2x_5}{4} = \dfrac{7+2b_2}{4}$.

E_2 : $-x_3 + 2x_4 - x_5 = -3 \rightarrow x_3 = 3 + \dfrac{7+2b_2}{2} - b_2 = \dfrac{13}{2}$

E_1 : $x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_5 = 5 \rightarrow x_1 = 5 - 2b_2 - \dfrac{13}{2} + 2b_1 = -\dfrac{3}{2} + 2b_1 - 2b_2$

En notation vectorielle :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ \frac{13}{2} \\ \frac{7}{4} \\ 0 \end{pmatrix} + b_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = w + b_1 v_1 + b_2 v_2$$

linéairement indépendants.

Applications :

1) Dimension ~~de l'espace des solutions~~ Base et dimension de l'espace des solutions d'un système linéaire homogène

Prop : Soit
$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$
un système linéaire homogène $\Leftrightarrow a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$, $a_j \in \mathbb{R}^m$.

Si le système en forme échelonnée admet k pivots, alors l'espace des solutions
$V = \{(x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n \mid (x_1, \dots, x_n) \text{ est solution de } (S)\}$ a dimension $n-k$.

Preuve : On a vu qu'on peut écrire $V = \{ t_1 v_1 + \dots + t_p v_p \mid t_j \in \mathbb{R}\}$, avec $p = n-k$ et $\{v_j\}$ linéairement indépendants.

Donc $V = \text{Vect}\{v_j\}$, $\{v_j\}$ est une base de V, $\dim V = p = n-k$. □

Corollaire : Si (S) avec $n > m \Rightarrow \exists (x_1 \dots x_n)$ solution non nulle de (S).

2) Extraire une famille libre.

Prop : Soit $V = \text{Vect}\{v_1 \dots v_n\}$ avec $v_j \in \mathbb{R}^m$.

Considérons le système (S) : $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$. Si le système (S') équivalent à S est en forme échelonnée à k pivots, dans les colonnes $i_1, \dots, i_k$, alors les vecteurs $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\}$ forment une base de V. $\left(v_1 \middle| \dots \middle| v_n \,\middle\|\, 0\right)$

Preuve : Soit $p = n-k$. Par l'algorithme de Gauss, on a vu que les solutions de (S) sont de la forme : ~~$\lambda_{i_h} = t_1 w_{i_h,1} + \dots + t_p w_{i_h,p}$ $\forall h = 1 \dots$~~ k.
~~$\lambda_i = t_i$~~

À renumérotation près des vecteurs $v_1 \dots v_n$, on peut supposer que $i_1 = 1 \dots i_k = k$. Donc S' est de la forme

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & - & - & - & & & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & - & - & - & \vdots \\ 0 & 0 & & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & a_{kk} & 0 & - 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\ne 0$

Les solutions sont donc de la forme

$$\left.\begin{aligned} \lambda_{k+1} &= t_{1} \in \mathbb{R} \\ &\vdots \\ \lambda_n &= t_{n-k} \in \mathbb{R} \end{aligned}\right\} \text{paramètres libres}$$

$$\begin{aligned} \lambda_k &= w_{k,1} b_1 + \dots + w_{k,p} b_p \qquad (\text{Sol } S) \\ \lambda_{k-1} &= w_{k-1,1} b_1 + \dots + w_{k-1,p} b_p \\ &\vdots \\ \lambda_1 &= w_{1,1} b_1 + \dots + w_{1,p} b_p . \end{aligned}$$

On veut montrer que si $\mathbb{B} = \{v_1 \dots v_k\}$ est une base de V.

Montrons que $\mathrm{Vect}(\mathbb{B}) = V$.

$\subseteq$ évident

Il suffit montrer que $v_j \in \mathrm{Vect}(\mathbb{B})$ $\forall j$. si $j \leq k$ c'est évident

si $v_j > k$ posons le paramètre libre $t_{j-k} = -1$. et les autres paramètres libres $= 0$. on obtient $\lambda_1 \dots \lambda_k$ tels que

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k + \underset{-1}{\underset{\shortparallel}{\lambda_j}} v_j = 0 \rightarrow v_j = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \text{ ou } v_j \in \mathrm{Vect}\{v_1 \dots v_k\}.$$

Par "lemme" ... $V = \mathrm{Vect}\{v_1 \dots v_k\}$.

Montrons que $\{v_1 \dots v_k\}$ sont linéairement indépendants.

Il s'agit de montrer que $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0 \ (*)$ entraîne $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$.

Mais les solutions de $(*)$ sont données par les solutions de (S) avec les paramètres libres $t_1 = \dots = t_p = 0$. Des solutions (Sol S) on en déduit $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$ □

Rmq : Avec la méthode précédente, on trouve aussi les relations liants des vecteurs $v_1 \dots v_n$. Données par $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ avec λ_j solutions du système (S)

C3 - (P)

3) Exprimer un espace vectoriel engendré par $v_1 - v_m$ comme solution d'un système linéaire (homogène)

Soient $v_1 \dots v_m \in \mathbb{R}^n$ vecteurs on veut trouver $(a_{i,j})_{\substack{i=1\dots n \\ j=1\dots k}}$ tq

$V = \mathrm{Vect}(v_1 \dots v_m) = \{ (x_1 - x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_{1,j} x_1 + \dots + a_{n,j} x_n = 0 \ \forall j = 1 \dots p \} =: W$

~~Construire le système~~ Soit $v_j = \begin{pmatrix} v_{j,1} \\ v_{j,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, Alors $(a_{1,j}, \dots a_{n,j}) \in$ ~~du système~~

$$\begin{cases} a_1 v_{1,1} + \dots + a_n v_{1,n} = 0 \\ \vdots \\ a_1 v_{m,1} + \dots + a_n v_{m,n} = 0. \end{cases}$$

sont les solutions linéairement indépendantes du système

$$(S) \left(\begin{array}{c|c} v_1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ v_m & 0 \end{array} \right)$$

~~avec k # pivot.~~ avec $p = \#$ paramètres libres $= n - \#$ pivots.

Preuve la ~~j-ème ligne du système (S) est la condition $v_j \in Sol$~~ (a

$a_1 v_{j,1} + \dots + a_n v_{j,n} = 0 \iff v_j \in \{ (x_1 - x_n) \mid a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0 \}$

Donc $\mathrm{Vect}(v_1 \dots v_m) \subseteq W$.

~~Montrons que W est le plus petit sous-espace vectoriel avec cette propriété.~~

Comme on a pris un système de générateurs des équations $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$ qui contient $v_1 - v_m$, W est le plus petit espace vect. qui contient $v_1 - v_m \Rightarrow$

$\mathrm{Vect}(v_1 \dots v_m) = W$.

Corollaire : $(v_1 \dots v_m)$ engendre $\mathbb{R}^n \iff$ de la prop. précédente $a_{1,j} x_1 + \dots + a_n x_n = 0 \Rightarrow a_i = 0 \ \forall i$.

Donc $\{v_1 \dots v_m\}$ engendre $\mathbb{R}^n$

$\Updownarrow$

le système $\left(\begin{array}{c|c} v_1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ v_m & 0 \end{array} \right)$ n'admet que la solution nulle

4) Completer une famille libre à une base de $\mathbb{R}^n$.

Soit $\{b_1 \dots b_h\}$ une famille libre, et $e_1 \dots e_n$ une base de $\mathbb{R}^n$ (la canonique par exemple)

le système linéaire homogène de matrice associée : a ses n pivots en positions

$$\left(b_1 \middle| b_2 \middle| \dots \middle| b_h \middle| e_1 \middle| e_2 \dots e_n \middle| \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}\right)$$

$1 \dots h, j_1 \dots j_{n-h}$. et les vecteurs $\{b_1 \dots b_h, e_{j_1} \dots e_{j_{n-h}}\}$

forment une base de $\mathbb{R}^n$.

Preuve, est une corollaire de la méthode pour ~~extraire~~ une ~~famille libre~~ base à partir d'une famille génératrice.

Le fait que les premiers h indices sont pivots dérive du fait que les $\{b_j\}$ sont linéairement indépendants.

5) Intersection de deux sous-espaces décrits par familles génératrices.

$V = \mathrm{Vect}\{v_1 \dots v_\ell\}$ $\quad W = \mathrm{Vect}\{w_1 \dots w_h\}$.

$u \in V \cap W \Leftrightarrow \exists\, \lambda_1 \dots \lambda_\ell, \mu_1 \dots \mu_h \in \mathbb{R}$: $u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_\ell v_\ell = \mu_1 w_1 + \dots + \mu_h w_h$.

Il faut donc résoudre le système $\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 \dots & \lambda_\ell & -\mu_1 \dots -\mu_h & \\ v_1 \dots & v_\ell, & w_1 \dots w_h & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}\end{array}\right)$, et.

considérer les vecteurs $u = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i v_i$.

6) Intersection ... par relations linéaires

$V = \{(x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n \mid$ système $a_{i,1} x_1 + \dots + a_{i,n} x_n = 0\}$. $\quad W = \{x \in \mathbb{R}^n : b_{i,1} x_1 + \dots + b_{i,n} x_n = 0\}$

$$\Rightarrow V \cap W = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{cases} a_{1,1} x_1 + \dots + a_{1,n} x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m,1} x_1 + \dots + a_{m,n} x_n = 0 \\ b_{1,1} x_1 + \dots + b_{1,n} x_n = 0 \\ \vdots \\ b_{\ell,1} x_1 + \dots + b_{\ell,n} x_n = 0 \end{cases} \right\}.$$

7) Somme par familles génératrices.

$V = \mathrm{Vect}\{v_1 \dots v_e\}$, $W = \mathrm{Vect}\{w_1 \dots w_h\}$. ⇒

⇒ $V + W = \mathrm{Vect}\{v_1 \dots v_e, w_1 \dots w_h\}$.

8) Somme par relations: trouver base de V et W, et point 7.

9) Un supplémentaire par familles génératrices.

$V = \mathrm{Vect}\{v_1 \dots v_e\}$. Sous-extraire une base $V = \mathrm{Vect}\{\overset{B}{b_1 \dots b_r}\}$.

Compléter B à base de $\mathbb{R}^n$ (point 4). $\underline{\{b_1 \dots b_r, b_{r+1} \dots b_n\}}$

$W = \mathrm{Vect}\{b_{r+1} \dots b_n\}$ est t.q. $V \oplus W = \mathbb{R}^n$

10) Supplémentaire par relations.

$V = \{x \mid a_{i,1}x_1 + \dots + a_{i,n}x_n = 0\}_{i=1\dots m}$. $a_{i,1} \dots a_{i,n}$ pas tous nuls $\forall i$.

$\forall i = 1 \dots m$, considérer $v_i = (a_{i,1} \dots a_{i,n})$.

⇒ $v_i \notin V$, car $a_{i,1} \cdot a_{i,1} + \dots + a_{i,n} \cdot a_{i,n} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 > 0$ $(\neq 0)$.

$W = \mathrm{Vect}\{v_1 \dots v_m\}$ est t.q. $V \oplus W = \mathbb{R}^n$.

Preuve: Si les équations sont linéairement indépendantes, alors les vecteurs v_i le sont, par construction. $\dim V = n-m$, $\dim W = m$, $V \cap W = \{0\}$

⇒ $\mathbb{R}^n = V \oplus W$.

En général ça marche aussi mais c'est plus délicat.